نظرية (١-٥) :

إذا كانت G زمرة ليست إبدالية فإن $|G| \geq 6$
كمثال على ذلك الزمرة $(S_3, \circ)$.

تعريف (١-٤) :

لتكن $(G,*)$ زمرة $a \in G$، نقول ان رتبة (order)العنصر a هي n اذا كان n
هو اصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^n=e$ ، e العنصر المحايد في الزمرة G
ونقول ان العنصر a ذو رتبة لانهائية (in finite order) إذا لم يوجد عدد صحيح
موجب n يحقق $a^n=e$ ويرمز عادة لرتبة العنصر a بالرمز $|a|$ أو $O(a)$.

مثال (١-٩) :

لتكن$G=(Z_4, \oplus)$ بماأن
$Z_4=\{0,1,2,3\}$، $|Z_4|=4$
0هو محايد الزمره G

$0^1=0$

إذن $|0|=1$

$1^1=1$
$1^2=1\oplus1=2$
$1^3=1\oplus1\oplus1=3$
$1^4=1\oplus1\oplus1\oplus1=0$

إذن $|1|=4$

$2^1=2$
$2^2=2\oplus2=0$

إذن $|2|=2$

$3^1=1$
$3^2=3\oplus3=2$
$3^3=3\oplus3\oplus3=1$
$3^4=3\oplus3\oplus3\oplus3=0$

إذن $|3|=4$

نظرية (١-٦):

إذا كانت G زمرة منتهية فإن رتبة كل عنصر فيها منتهية أيضا .

ملاحظات:

١) العنصر الوحيد في $(G,*)$الذي رتبته تساوي الواحد هو العنصر المحايد.
٢) عكس نظريه (١-٦) غير صحيح أي انه إذا كانت رتبة كل عنصر من عناصر الزمرة G
منتهية فليس من الضروري ان تكون G زمرة منتهية ،وكمثال على ذلك:
إذا كانت X مجموعة غير منتهية وكانت $G=(P(X),+)$ حيث
$$A+B=(A\cup B)-(A\cap B)$$
من الواضح ان G زمرة لانهائية ولكن لكل $A\in G$ نجد أن
$A+A=\phi$ وعليه فإن $|\mathbf{A}|=2$.

نظرية (١-٧):

لتكن G زمرة $a\in G$ حيث ان $|a|=n$ عندئذ:
١) $|a|=|a^{-1}|$
٢) إذا كان $a^m=e$ حيث $m\in Z^+$ فأن $n|m$.
٣) إذا كان $t\in Z^+$ حيث $(t,n)=d$ فأن $|a^t|=n/d$

نتيجة (١-١):

إذا كان $a \in G$ حيث $|a| = n$ فأن $|a^t| = n$ إذا و إذا فقط كان $(t,n) = 1$.

تعريف (١-٥):(الزمرة الجزئية Sup groups):

لتكن $(G,*)$ زمرة ولتكن $H \leq G \neq \phi$ يقال عن H أنها زمرة جزئية من G إذا كانت $(H,*)$ زمرة ويرمز لها بالرمز $H \leq G$.

ملاحظات:

١) اذ كانت $H \leq G$ وكانت $H \neq G$ تسمى H زمرة جزئية فعلية .
٢) اذ كانت $H \leq G$ و $K \leq H$ فإن $K \leq G$
٣) لكل زمرة $(G,*)$ زمرتان جزئيتان على الأقل هما $(G,*)$ و $(\{e\},*)$ تسمى الأخيرة منها زمرة جزئية واضحة (Trivial Subgroup).

مثال(١-١٠):

من الواضح ان $(2Z,+) \leq (Z,+) \leq (Q,+) \leq (R,+) \leq (C,+)$
$(Q^*,.) \leq (R^*,.) \leq (C^*,.)$.

نظرية (١-٨):

اذا كانت $(G,*)$ زمرة وكانت $H \subseteq G \neq \phi$ فإن $H \leq G$ إذا وإذا فقط كان

$$\forall a, b \in H : ab^{-1} \in H$$

نتيجة (١-٢):

اذا كانت G زمرة وكانت H مجموعة جزئية منتهية غير خالية من G فإن:

$H \le G$ إذا وإذا فقط

$$\forall a,b \in H ,\quad ab \in H$$

مثال(١-١١):

١) إذا كانت $G=R^* \times R$ حيث $(a,b)(c,d)=(ac,bc+d)$ فأن:
$H=\{(a,0):a>0\}$ زمرة جزئية من G لأن
$(a,0),(c,0) \in H \ ,H \subseteq G \neq \phi$

فإن:

$$(a,0)(c,0)^{-1}=(a,0)(\frac{1}{c},0)=(\frac{a}{c},0) \in H$$

أما المجموعة $K=\{(a,3a^3):a \neq 0\}$ ليست زمرة جزئية من G لأن العنصر محايد $(1,0)$ لاينتمي الى K .

٢) المجموعه الجزئيه$H=\{2^n:n \in Z\}$ زمرة جزئية من $(Q^*,.)$ لان
$H \subseteq Q^* \neq \phi$
$x=2^n , y=2^m \in H$فإن

$$xy^{-1}=2^n 2^{-m}=2^{n-m} \in H : n-m \in Z$$

٢) لتكن $(\{-1,1\},\bullet)$ زمرة عندئذ فأن $(\{1\},\bullet) \le (\{-1,1\},\bullet)$حيث $\bullet$ الضرب العادي .

٣) إذا كانت $V=\{e,a,b,c\}$ نجد كلا من $\{e,a\}$و $\{e,b\}$و $\{e,c\}$ زمرة جزئية منV لكن$\{e,b,c\}$ ليست كذلك.

٤) إذا كانت مجموعة A_n مجموعة التبديلات الزوجية منS_n بحيث أن$n \ge 2$ فإن $A_n \le S_n$.

نظرية (١-٩):

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئيه من الزمرة $(G,*)$ فإن :

١) اذ كانت e, e' هما العنصران المحايدان في G و H على الترتيب فإن $e = e'$.

٢) معكوس العنصر a في الزمرة الجزئية H هو نفسه معكوس العنصر a في الزمرة G .

<u>نظرية (١-١٠):</u>

$(G, *)$ زمرة ما $\phi \neq H \subseteq G$ فإن: $H \leq G$ إذا وإذا فقط كانت
$\forall a, b \in H, \; a^{-1} \in H \;, a * b \in H$

<u>نظرية (١-١١):</u>

إذا كانت $H_i \leq G$ لكل i فإن : $\bigcap_i H_i \leq G$.

<u>ملاحظات:</u>

إذا كانت G زمرة وكانت A و B زمرتان جزئيتان من G فان $A \cup B$ قد لايكون زمرة جزئية من G على سبيل المثال :

(١) لتكن $(G,.)$ زمرة ابدالية

$$H_1 = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H_2 = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

كلا من H_1, H_2 زمرة جزئية من $(G,.)$.

لكن $H_1 \cup H_2 = \{I, A, B\}$ ليست زمرة جزئية من $(G,.)$ لأن

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin H_1 \cup H_2$$

(٢) $A=(2Z,+), G=(Z,+), B=(3Z,+)$ فإن كلا من A,B زمرة جزئية من G لكن $A\cup B$ ليست زمرة جزئية من G لان $2,3\in A\cup B$ لكن $2+3=5\notin A\cup B$.

نظرية (١-١١):

لتكن H_1,H_2 زمرتان جزئيتان من الزمرة $(G,*)$ عندئذ فأن $H_1\cup H_2$ زمرة جزئية من الزمرة G إذا وإذا فقط كان $H_1\subseteq H_2$ او $H_2\subseteq H_1$.

نتيجة (١-٣):

أي زمرة لا يمكن ان تكون كإتحاد لزمرتين جزئيتين فعليتين منها.

مثال (١-١٢):

لتكن الزمرة $(R^*,.)$ ولتكن المجموعتان

$$H=\{x\in R^*: x=1 \vee x\in \overline{Q}\}$$

$$K=\{x\in R^* : x\geq 1\}$$

حيث $\overline{Q}$ مجموعة الأعداد غير النسبية.

هل $(H,.)$ و $(K,.)$ زمرتين جزئيتين من الزمرة $(R^*,.)$.

الحل:

$(H,.)$ ليست زمرة جزئية من الزمرة $(R^*,.)$ لانه على سبيل المثال $\sqrt{2}\in H$ لكن $\sqrt{2}.\sqrt{2}=2\notin H$ وكذلك $(K,.)$ ليست زمرة جزئية من $(R^*,.)$ لانه على سبيل المثال $2\in k$ لكن $2^{-1}=\frac{1}{2}\notin k$.

تعريف (١-٦): مركز الزمرة (Center of a Group).

لتكن $(G,*)$ زمرة يعرف مركز الزمرة G بأنه المجموعة

$$z(G)=\{x\in G : xa=ax, \forall a\in G\}$$